



TITLE:

歳差回転球内流れの高レイノルズ数・低ポアンカレー数極限 (オイラー方程式の数理: 渦運動と音波150年)

AUTHOR(S):

木田, 重雄

---

CITATION:

木田, 重雄. 歳差回転球内流れの高レイノルズ数・低ポアンカレー数極限 (オイラー方程式の数理: 渦運動と音波150年). 数理解析研究所講究録 2010, 1697: 148-166

ISSUE DATE:

2010-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/141665>

RIGHT:

# 歳差回転球内流れの高レイノルズ数・低ポアンカレー数極限

京大・工 木田重雄 (Shigeo KIDA)

歳差回転する球内の定常流を、スピン回転角速度が大きく、歳差回転角速度が小さい場合に、 $\Gamma \ll Re^{-1/2} \ll 1$  の極限における漸近解析で求める ( $Re$  はレイノルズ数,  $\Gamma$  はポアンカレー数)。流れ場は、球面に沿う薄い境界層と、それ以外で球の大部分を占める非粘性領域に分けられる。境界層の厚さは、緯度  $\pm 30^\circ$  (スピン回転軸を極軸として) の近傍 (臨界層) を除いて、 $O(Re^{-1/2})$  である。臨界層の厚さは  $O(Re^{-2/5})$  で、極角方向の広がり  $O(Re^{-1/5})$  である。非粘性領域では、球と同じ角速度で回転する  $O(1)$  の剛体回転流とスピン回転軸に直交する回転軸をもつ  $O(\Gamma Re^{-1/2})$  の剛体回転流に加えて、領域全体にわたって  $O(\Gamma)$  の流れが誘起される。上記臨界層を底面境界とし極を頂点とする 2 つの円錐の側面で幅が  $O(Re^{-1/5})$  で流速が  $O(\Gamma Re^{3/10})$  の薄い剪断層が現れる。これらの結果を数値シミュレーションで得られた  $Re = 10^5$ ,  $\Gamma = 2 \times 10^{-4}$  での速度場と比較して確かめる。

## 1 歳差回転球

回転球状流体は、自転する天体のモデルとして古くから興味をもたれていたし、多くの研究の蓄積がある (たとえば, Roberts and Stewartson 1963)。また、回転軸が歳差する球状流体の流れは、地球など磁場をもつ天体のダイナモ作用のメカニズムの解明を目指して調べられてきた (たとえば, Bondi and Lyttleton 1953, Busse 1968)。われわれは最近、歳差回転球の手軽で精度よく乱流を作ることのできる能力、および容器形状と流れの駆動機構の簡単さに着目し、その実験的、数值的、解析的研究を行なっている (Goto *et al.* 2007, Kida and Nakayama 2008, Kida *et al.* 2009)。この系の流れの状態は、初期条件を除けば、ただ 2 つの無次元パラメータ、すなわち、レイノルズ数  $Re$  とポアンカレー数  $\Gamma$  (定義は次節の式 (4) と (5)) によって決定される。これらのパラメータ空間全体における流れの相図、特に定常流と非定常流の境目、を明らかにすることがわれわれの当面の目標のひとつである。この境目は、支配パラメータがあまり大きくない場合には数值的に求めることができる (図 6, 木田等 2007) が、それらが極めて大きい場合には漸近解析が有効になる。本稿では、 $\Gamma \ll Re^{-1/2} \ll 1$  の極限における定常流の線形安定解析に必要となる定常流を求める。

## 2 基礎方程式

弱い歳差回転球内の非圧縮粘性流体の定常流れを考える。スピンと歳差の回転角速度をそれぞれ、 $\Omega_s (\equiv \Omega_s \hat{x})$  と  $\Omega_p (\equiv \Omega_p \hat{z})$  で表し、互いに垂直で大きさは時間的に一定であるとする。ここでは、角速度  $\Omega_p$  で回転する直角座標系  $(x, y, z)$  を導入している。記号  $\hat{\cdot}$  は単位ベクトルを表す。(2 つの回転軸が直交していない場合でも、次節以降で述べる  $\Gamma$  展開の 1 次の流れ場 (方程式系 (8) - (10)) に限れば、直交の場合に帰着できる。)

角速度  $\Omega_p$  で回転する歳差座標系での流体の定常運動は、ナビエ・ストークス方程式、

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p + 2\Gamma \hat{z} \times \mathbf{u} - \frac{1}{2} \Gamma^2 \nabla (\mathbf{r} \times \hat{z})^2 - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

と連続の式、

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

および、球表面における粘着境界条件、

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{r} \quad (|\mathbf{r}| = 1 \text{ で}) \quad (3)$$

で記述される。ここに、 $\mathbf{u}$  は速度、 $p$  は圧力、 $t$  は時間、 $\mathbf{r}$  は位置ベクトル、 $\nabla$  は勾配演算子である。式 (1) の左辺第 3 項と 4 項はそれぞれ、コリオリ力と遠心力を表す。物理量はすべて、球の半径  $a$ 、スピン回転角速度の大きさを  $\Omega_s$ 、流体の動粘性係数  $\nu$ 、および流体密度で無次元化している。

式 (1) には、2つの無次元パラメータ、すなわち、レイノルズ数

$$Re = \frac{a^2 \Omega_s}{\nu} \quad (4)$$

とポアンカレ数

$$\Gamma = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \quad (5)$$

が現れている。

歳差がなく ( $\Gamma = 0$ )、単にスピン回転している場合、方程式系 (1) - (3) は剛体回転流、

$$\mathbf{u}_{\text{solid}} = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{r} \quad (= \hat{\boldsymbol{\varphi}} r \sin \theta), \quad (6a)$$

$$p_{\text{solid}} = \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{r}|^2 \quad (= \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta) \quad (6b)$$

を与える。

したがって、歳差が弱い場合 ( $\Gamma \ll 1$ ) は、速度場と圧力場を

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{solid}} + \Gamma \mathbf{u}^{(1)} + \Gamma^2 \mathbf{u}^{(2)} + \dots, \quad (7a)$$

$$p = p_{\text{solid}} + \Gamma p^{(1)} + \Gamma^2 p^{(2)} + \dots \quad (7b)$$

のように、 $\Gamma$  のべきで展開できるであろう。

式 (7a) と (7b) を方程式系 (1) - (3) に代入し、 $O(\Gamma)$  の項を拾うと、

$$(\mathbf{u}_{\text{solid}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{(1)} + (\mathbf{u}^{(1)} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{\text{solid}} + \nabla p^{(1)} - \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}^{(1)} = -2\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}_{\text{solid}}, \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{(1)} = 0, \quad (9)$$

および

$$\mathbf{u}^{(1)} = 0 \quad (|\mathbf{r}| = 1 \text{ で}) \quad (10)$$

が得られる。

剛体回転流  $\mathbf{u}_{\text{solid}}$  は  $x$  軸まわりに軸対称であるから、この 1 次のオーダの系は、以下に示す対称性を有する解を許す。すなわち、 $x$  軸を極軸とする球極座標  $(r, \theta, \varphi)$ 、もしくは、円筒座標  $(x, \rho, \varphi)$  で、解は

$$\mathbf{u}^{(1)}(r, \theta, \varphi) = \text{Real}(\mathbf{v}(r, \theta) e^{i\varphi}), \quad p^{(1)}(r, \theta, \varphi) = \text{Real}(q(r, \theta) e^{i\varphi}), \quad (11a)$$

もしくは、

$$\mathbf{u}^{(1)}(x, \rho, \varphi) = \text{Real}(\mathbf{v}(x, \rho) e^{i\varphi}), \quad p^{(1)}(x, \rho, \varphi) = \text{Real}(q(x, \rho) e^{i\varphi}) \quad (11b)$$

と表される。ここに、 $\mathbf{v}$  と  $q$  は複素数である。以下では、この 1 次の方程式系 (8) - (10) をレイノルズ数が大きい場合 ( $Re \gg 1$ ) に対して解く。

### 3 レイノルズ数が大きい場合の漸近解析

レイノルズ数が大きいとき ( $Re \gg 1$ ) には、球面に沿って厚さが  $O(\delta)$  の境界層が発達する。ここに、

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (12)$$

は式 (8) の左辺の移流項 (第 1 項) と粘性項 (第 4 項) のつりあいから決定した。このとき、球内部の流れ場は、境界層と非粘性領域の流れを別々に調べ、それらをつなぎあわせることで求められる。

#### 3.1 非粘性領域

まず最初に、式 (8) において、粘性項が無視できる非粘性領域の流れを調べる。 $\Gamma$  の 1 次の流れは、剛体回転流によるコリオリ力 (すなわち、式 (8) の右辺) によって駆動されるので、速度場  $\mathbf{u}^{(1)}$  はこの項と同じ大きさ  $O(\Gamma)$  であると想定するのが普通であろう。しかし、以下に示すように (式 (18) とその下を参照)、実際は、境界層の流れとの相互作用を通して、非粘性領域には、より大きなオーダー  $O(\Gamma\delta^{-1})$  の速度場が誘起される。このことに注意しつつ、まず速度場を  $O(\Gamma)$  と仮定して解析を始める。ここで得られた結果は、単にソース項を省略することによって、 $O(\Gamma\delta^{-1})$  の速度場にも適用することができるからである。

円筒座標系  $(x, \rho, \varphi)$  で、式 (8) の粘性項を省略したオイラー方程式は、

$$iv_{ix} + \frac{\partial q_i}{\partial x} = 2i\rho, \quad (13a)$$

$$-2v_{i\varphi} + iv_{i\rho} + \frac{\partial q_i}{\partial \rho} = 0, \quad (13b)$$

$$2v_{i\rho} + iv_{i\varphi} + \frac{iq_i}{\rho} = 0 \quad (13c)$$

と書ける (添え字  $i$  は粘性領域の物理量であることを示す)。連続の式 (9) は、

$$\frac{\partial v_{ix}}{\partial x} + \left( \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \right) v_{i\rho} + \frac{1}{\rho} v_{i\varphi} = 0 \quad (13d)$$

となる。ここに、 $\mathbf{v}_i = v_{ix}\hat{\mathbf{x}} + v_{i\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + v_{i\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ ,  $\mathbf{u}_{\text{solid}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}}\rho$  および  $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}\sin\varphi + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\cos\varphi$  を考慮した。

球面上での境界条件は、速度の動径方向成分で与えられる。これは、境界層流の境界層外縁での値 ( $B(\cos\theta)$ , 式 (50) 参照),

$$\cos\theta v_{ix}(\cos\theta, \sin\theta) + \sin\theta v_{i\rho}(\cos\theta, \sin\theta) = B(\cos\theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi \text{ に対し}) \quad (14)$$

に等しい。

式 (13a) - (13d) から、

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} - 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v_{ix} = 0 \quad (15)$$

を導くのは容易である。偏微分方程式 (15) の一般解は、 $F(x)$  を任意関数として、

$$v_{ix}(x, \rho) = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} F\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \cos\lambda\right) \cos\lambda d\lambda, \quad (16a)$$

で与えられる (付録 A 参照)。これを用いて、速度場の他の成分と圧力場を計算すると、それぞれ、

$$v_{i\rho}(x, \rho) = 2x - \int_0^{2\pi} F\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \cos\lambda\right) (1 + \sin^2\lambda) d\lambda, \quad (16b)$$

$$v_{i\varphi}(x, \rho) = 2ix - i \int_0^{2\pi} F\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \cos \lambda\right) (1 + \cos^2 \lambda) d\lambda, \quad (16c)$$

$$q_i(x, \rho) = i\rho \left[ 2x - 3 \int_0^{2\pi} F\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \cos \lambda\right) \sin^2 \lambda d\lambda \right] \quad (16d)$$

となる。

式 (16a) と (16b) を境界条件 (14) に代入することによって、関数  $F(x)$  についての積分方程式、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F\left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \lambda\right) \left[ \sqrt{3} \cos \theta \cos \lambda - \sin \theta (1 + \sin^2 \lambda) \right] d\lambda \\ = B(\cos \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi \text{ に対して}) \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。

式 (17) に  $\sin^2 \theta \cos \theta$  を掛け、 $\theta$  について 0 から  $\pi$  まで積分すると、左辺の積分はゼロとなり（計算略）、

$$\int_0^\pi B(\cos \theta) \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \frac{8}{15} \quad (18)$$

が得られる。この式は、球面境界での速度の  $O(\Gamma)$  の動径成分  $B(\cos \theta)$  は恒等的にゼロではないこと、すなわち、 $O(\Gamma\delta^{-1})$  の接線成分が誘起されていることを示している。（なぜなら、境界層では、球面に垂直な速度成分（球極座標における動径成分  $u_r$ ）は接線成分（ $u_\theta$  と  $u_\varphi$ ）に比して  $O(\delta)$  だけ小さく、そして、非粘性領域では、速度のすべての成分が同じオーダーの大きさであるからである。）これは、非粘性領域に  $O(\Gamma\delta^{-1})$  の速度場が誘起される結果となる。

この  $O(\Gamma\delta^{-1})$  の速度場と圧力場（それぞれ、 $\mathbf{v}_i^{[-1]}$  と  $q_i^{[-1]}$  で表す）は、式 (13a) - (14) で、(13a) と (14) の右辺をゼロとおいたもので記述される。その解は、 $F^{[-1]}$  を任意関数として、

$$v_{ix}^{[-1]}(x, \rho) = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} F^{[-1]} \left( \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \cos \lambda \right) \cos \lambda d\lambda, \quad (19a)$$

$$v_{i\rho}^{[-1]}(x, \rho) = - \int_0^{2\pi} F^{[-1]} \left( \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \cos \lambda \right) (1 + \sin^2 \lambda) d\lambda, \quad (19b)$$

$$v_{i\varphi}^{[-1]}(x, \rho) = -i \int_0^{2\pi} F^{[-1]} \left( \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \cos \lambda \right) (1 + \cos^2 \lambda) d\lambda, \quad (19c)$$

$$q_i^{[-1]}(x, \rho) = -3i\rho \int_0^{2\pi} F^{[-1]} \left( \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho \cos \lambda \right) \sin^2 \lambda d\lambda \quad (19d)$$

と書ける。

球面境界で速度の  $O(\Gamma\delta^{-1})$  の動径成分がゼロであるという境界条件より、

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} F^{[-1]} \left( \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \lambda \right) \left[ \sqrt{3} \cos \theta \cos \lambda - \sin \theta (1 + \sin^2 \lambda) \right] d\lambda = 0 \\ (0 \leq \theta \leq \pi \text{ に対して}) \end{aligned} \quad (20)$$

が満たされなければならない。式 (20) は、 $C$  を複素数として、

$$F^{[-1]}(x) = Cx \quad (21)$$

なる解をもつ。（しかし、一意的かどうかは不明である。）ここで、

$$C = \frac{2i}{3\pi} a e^{ib} \quad (a \text{ と } b \text{ は実数}) \quad (22)$$

とおけば,

$$v_{ix}^{[-1]}(x, \rho) = iae^{ib}\rho, \quad (23a)$$

$$v_{i\rho}^{[-1]}(x, \rho) = -iae^{ib}x, \quad (23b)$$

$$v_{i\varphi}^{[-1]}(x, \rho) = ae^{ib}x, \quad (23c)$$

$$q_i^{[-1]}(x, \rho) = ae^{ib}\rho x, \quad (23d)$$

$$(23e)$$

あるいは,

$$u_{ix}^{[-1]}(x, \rho, \varphi) = -a\rho \sin(\varphi + b), \quad (24a)$$

$$u_{i\rho}^{[-1]}(x, \rho, \varphi) = ax \sin(\varphi + b), \quad (24b)$$

$$u_{i\varphi}^{[-1]}(x, \rho, \varphi) = ax \cos(\varphi + b), \quad (24c)$$

$$p_i^{[-1]}(x, \rho, \varphi) = a\rho x \cos(\varphi + b) \quad (24d)$$

となる。この速度場は、角速度  $a$  の剛体回転流を表す。ただし、その回転軸は  $(y, z)$  面内で  $y$  軸の負の方向から角度  $-b$  だけ傾いている。対応する渦度場を直角座標系で表せば、 $\omega_x^{[-1]} = 0$ ,  $\omega_y^{[-1]} = -2a \cos b$ ,  $\omega_z^{[-1]} = 2a \sin b$  と書ける。

以上の、非粘性領域における解析を要約すると、

- [1] 速度場は、 $O(\Gamma\delta^{-1})$  では剛体回転流であり、その回転角速度の大きさ ( $a$  と表す) と方向 ( $b$  で表す) は任意である。
  - [2]  $O(\Gamma)$  の速度場は未定関数  $F(x)$  を含む積分形 (16a) – (16c) で表される。 $F(x)$  は、球面上での積分方程式 (17) で決定される。
  - [3]  $O(\Gamma)$  の速度の動径成分は球面上で、拘束条件 (18) を満たさなければならない。
- となる。これらの3項目は、以下で述べる境界層と非粘性領域の解析で使われる。

### 3.2 境界層

境界層内の流れの解析では、 $x$  軸を極軸とする球極座標  $(r, \theta, \varphi)$  を採用し、境界層変数

$$r = 1 - \delta s, \quad (25a)$$

$$v_r(r, \theta) = v_{Bs}(s, \theta), \quad (25b)$$

$$v_\theta(r, \theta) = \delta^{-1} v_{B\theta}(s, \theta), \quad (25c)$$

$$v_\varphi(r, \theta) = \delta^{-1} v_{B\varphi}(s, \theta), \quad (25d)$$

$$q(r, \theta) = \delta^{-1} q_B(s, \theta) \quad (25e)$$

を導入する。これらの境界層変数を用いると、方程式 (8) と (9) は、

$$\frac{\partial q_B}{\partial s} = 0, \quad (26a)$$

$$iv_{B\theta} - 2 \cos \theta v_{B\varphi} = -\frac{\partial q_B}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 v_{B\theta}}{\partial s^2}, \quad (26b)$$

$$iv_{B\varphi} + 2 \cos \theta v_{B\theta} = -\frac{iq_B}{\sin \theta} + \frac{\partial^2 v_{B\varphi}}{\partial s^2}, \quad (26c)$$

$$-\frac{\partial v_{Bs}}{\partial s} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta u_{B\theta}) + \frac{iu_{B\varphi}}{\sin \theta} = 0 \quad (26d)$$

と書ける。球面上では、粘着境界条件 (10),

$$v_{Bs}(0, \theta) = v_{B\theta}(0, \theta) = v_{B\varphi}(0, \theta) = 0 \quad (27)$$

を課す。他方、境界層外縁での境界条件は、

$$v_{B\theta}(\infty, \theta) = -iae^{ib}, \quad (28a)$$

$$v_{B\varphi}(\infty, \theta) = ae^{ib} \cos \theta, \quad (28b)$$

$$q_B(\infty, \theta) = ae^{ib} \sin \theta \cos \theta \quad (28c)$$

となる。なぜなら、非粘性領域の速度場 (23a) - (23d) は球極座標系で、

$$v_{ir}^{[-1]}(r, \theta) = 0, \quad (29a)$$

$$v_{i\theta}^{[-1]}(r, \theta) = -iae^{ib}r, \quad (29b)$$

$$v_{i\varphi}^{[-1]}(r, \theta) = ae^{ib}r \cos \theta, \quad (29c)$$

$$q_i^{[-1]}(r, \theta) = ae^{ib}r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (29d)$$

と表されるからである。

方程式系 (26a) - (28c) は容易に解けて、

$$v_{Bs}(s, \theta) = ae^{ib} \sqrt{1 - \mu^2} \left[ -\frac{3(1 - \mu)\lambda_-(\mu)}{8(\frac{1}{2} - \mu)^2} \left(1 - e^{-\lambda_-(\mu)s}\right) + \frac{i(1 + \mu)s}{4(\frac{1}{2} - \mu)} e^{-\lambda_-(\mu)s} \right. \\ \left. + \frac{3(1 + \mu)\lambda_+(\mu)}{8(\frac{1}{2} + \mu)^2} \left(1 - e^{-\lambda_+(\mu)s}\right) - \frac{i(1 - \mu)s}{4(\frac{1}{2} + \mu)} e^{-\lambda_+(\mu)s} \right], \quad (30a)$$

$$v_{B\theta}(s, \theta) = -\frac{iae^{ib}}{2} \left[ (1 + \mu) \left(1 - e^{-\lambda_-(\mu)s}\right) + (1 - \mu) \left(1 - e^{-\lambda_+(\mu)s}\right) \right], \quad (30b)$$

$$v_{B\varphi}(s, \theta) = +\frac{ae^{ib}}{2} \left[ (1 + \mu) \left(1 - e^{-\lambda_-(\mu)s}\right) - (1 - \mu) \left(1 - e^{-\lambda_+(\mu)s}\right) \right], \quad (30c)$$

$$q_B(s, \theta) = ae^{ib} \sin \theta \cos \theta \quad (30d)$$

が得られる。ここに、

$$\lambda_{\pm}^2 = i(1 \pm 2\mu) \quad (\text{Real}(\lambda_{\pm}) \geq 0), \quad (31a)$$

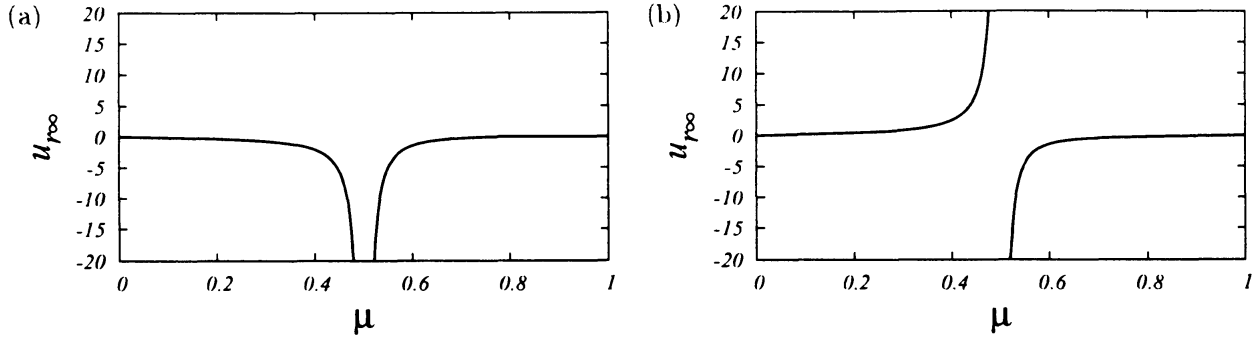


図 1: 境界層外縁における動径速度分布。(a)  $\varphi = 0$ , (b)  $\pi/2$ .

あるいは

$$\lambda_{\pm}(\mu) = (1 + \operatorname{sgn}(\frac{1}{2} \pm \mu)i)|\frac{1}{2} \pm \mu|^{\frac{1}{2}} \quad (31b)$$

である。

この  $\lambda_{\pm}$  は  $\mu$  の関数として、 $\mu = \mp \frac{1}{2}$  で特異であることに注意する。すなわち、 $\lambda_{\pm}$  の関数である速度場 (30a) – (30c) は  $\mu = \mp \frac{1}{2}$  で正則ではない。特に、動径成分  $v_{Bs}(s, \theta)$  は、この点で発散するので、この解はこのままでは使えない。この臨界点近傍の流れは次節で解析する。

非粘性領域の流れを求める際に境界条件として用いる速度の動径成分 (30a) の境界層外縁での値は、

$$v_{Bs}(\infty, \theta) = \frac{3ae^{ib}\sqrt{1-\mu^2}}{8} \left[ \frac{(1+\mu)\lambda_+(\mu)}{(\frac{1}{2}+\mu)^2} - \frac{(1-\mu)\lambda_-(\mu)}{(\frac{1}{2}-\mu)^2} \right] \quad (32)$$

となり、やはり、 $\mu = \pm \frac{1}{2}$  で発散する (図 1)。

### 3.3 臨界層

前節で見たように、境界層解は  $\mu = \pm \frac{1}{2}$  で発散する。速度場の表現 (30a) – (30c) で、 $\lambda_-(\mu)$  を含む項は  $\mu = \frac{1}{2}$  で、また  $\lambda_+(\mu)$  を含む項は  $\mu = -\frac{1}{2}$  で発散する。これに対し、圧力場 (30d) は境界層全体にわたって正則である。流れ場は赤道 ( $\mu = 0$ ) に関して対称であるから、ここでは、 $\mu = \frac{1}{2}$  近傍の解析のみ行なう。

境界層内の速度場 (30a) – (30c) からその特異成分

$$v_{Bs}^s(s, \theta) = ae^{ib}\sqrt{1-\mu^2} \left[ -\frac{3(1-\mu)\lambda_-(\mu)}{8(\frac{1}{2}-\mu)^2} (1 - e^{-\lambda_-(\mu)s}) + \frac{i(1+\mu)s}{4(\frac{1}{2}-\mu)} e^{-\lambda_-(\mu)s} \right], \quad (33a)$$

$$v_{B\theta}^s(s, \theta) = \frac{iae^{ib}}{2}(1+\mu)e^{-\lambda_-(\mu)s}, \quad (33b)$$

$$v_{B\varphi}^s(s, \theta) = -\frac{ae^{ib}}{2}(1+\mu)e^{-\lambda_-(\mu)s} \quad (33c)$$

を抜き出し、これを臨界層解で置き換えるのである。

境界層スケーリング (25a) – (25e) は臨界点のところでは成り立たないので、そこでは新たなスケーリングを見出さなければならない。まず、動径方向と極角方向にそれぞれスケーリング指数、 $\alpha$  と  $\beta$  を導入し、

$$r = 1 - \delta^\alpha \xi, \quad (34a)$$

$$\mu = \frac{1}{2} + \delta^\beta \eta \quad (34b)$$



とおく。ここで、

$$\alpha > \beta > 0 \quad (35)$$

と仮定しておく。

速度の特異成分 (33a) - (33c) を臨界点  $\mu = \frac{1}{2}$  の近傍で、 $\delta^\beta$  のべき級数に展開し、

$$v_{Bs}^s(\xi, \eta) = -\frac{\sqrt{3}ae^{ib}}{2\delta^{\frac{3}{2}\beta}} \left[ \frac{3[1 - \operatorname{sgn}(\eta)i]}{16|\eta|^{\frac{3}{2}}} \left( 1 - e^{-\delta^{\alpha+\frac{1}{2}\beta-1}[1-\operatorname{sgn}(\eta)i]|\eta|^{\frac{1}{2}}\xi} \right) + \frac{3i\xi}{8\eta} e^{-\delta^{\alpha+\frac{1}{2}\beta-1}[1-\operatorname{sgn}(\eta)i]|\eta|^{\frac{1}{2}}\xi} + \dots \right], \quad (36a)$$

$$v_{B\theta}^s(\xi, \eta) = \frac{3iae^{ib}}{4} e^{-\delta^{\alpha+\frac{1}{2}\beta-1}[1-\operatorname{sgn}(\eta)i]|\eta|^{\frac{1}{2}}\xi} \left[ 1 + \frac{2}{3}\delta^\beta\eta + \dots \right], \quad (36b)$$

$$v_{B\varphi}^s(\xi, \eta) = -\frac{3ae^{ib}}{4} e^{-\delta^{\alpha+\frac{1}{2}\beta-1}[1-\operatorname{sgn}(\eta)i]|\eta|^{\frac{1}{2}}\xi} \left[ 1 + \frac{2}{3}\delta^\beta\eta + \dots \right] \quad (36c)$$

とおく。ここで、 $s = \delta^{\alpha-1}\xi$  と  $\lambda_-(\mu) = \delta^{\frac{1}{2}\beta}[1 - \operatorname{sgn}(\eta)i]|\eta|^{\frac{1}{2}}$  なる関係式を用いた。これらの特異成分が  $\xi$  と  $\eta$  の関数として正常にふるまうためには、

$$\alpha + \frac{1}{2}\beta = 1 \quad (37)$$

でなければならない。不等式 (35) と式 (37) より、不等式  $0 < \beta < \frac{2}{3}$  が導かれる。この不等式は、 $|v_r| \ll |v_\theta|, |v_\varphi|$  を意味する。

臨界点近傍における速度の各成分の大きさは、式 (25a) - (25e) と (36a) - (36c) より、 $v_r(r, \theta) = O(\delta^{-\frac{3}{2}\beta})$ 、 $v_\theta(r, \theta) = O(\delta^{-1})$  および  $v_\varphi(r, \theta) = O(\delta^{-1})$  と見積もられる。そこで、解を

$$v_r(r, \theta) = \delta^{-\frac{3}{2}\beta} \left( v_{c\xi}(\xi, \eta) + \delta^\beta v_{c\xi}^{(1)}(\xi, \eta) + \dots \right), \quad (38a)$$

$$v_\theta(r, \theta) = \delta^{-1} \left( v_{c\eta}(\xi, \eta) + \delta^\beta v_{c\eta}^{(1)}(\xi, \eta) + \dots \right), \quad (38b)$$

$$v_\varphi(r, \theta) = \delta^{-1} \left( v_{c\varphi}(\xi, \eta) + \delta^\beta v_{c\varphi}^{(1)}(\xi, \eta) + \dots \right) \quad (38c)$$

のように、 $\delta^\beta$  のべき級数に展開する。このスケーリングでは、連続の式で  $v_{c\varphi}$  を含む項は無視できて、

$$\frac{\partial v_{c\xi}}{\partial \xi} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial v_{c\eta}}{\partial \eta} = 0 \quad (39)$$

を得る。

ナヴィエ・ストークス方程式の動径成分の主要項は、

$$-\sqrt{3}v_{c\varphi} = \frac{\partial q_c}{\partial \xi} \quad (40a)$$

である。ここに、圧力のスケーリングを

$$q(r, \theta) = \delta^{-\frac{1}{2}\beta} \left( q_c(\xi, \eta) + \delta^\beta q_c^{(1)}(\xi, \eta) + \dots \right) \quad (40b)$$

とし、式 (37) を考慮した。

式 (38a) – (38c) と (40b) をナビエ・ストークス方程式の  $\theta$  と  $\varphi$  成分に代入し、 $\delta$  展開の次のオーダーまで残すと、それぞれ

$$iv_{c\eta} - v_{c\varphi} + \left( -2\delta^\beta \eta v_{c\varphi} - \frac{\sqrt{3}}{2} \delta^{1-\frac{3}{2}\beta} \frac{\partial p_c}{\partial \eta} - \delta^\beta \frac{\partial^2 v_{c\eta}}{\partial \xi^2} + i\delta^\beta v_{c\eta}^{(1)} - \delta^\beta v_{c\varphi}^{(1)} \right) + \dots = 0, \quad (41a)$$

$$iv_{c\varphi} + v_{c\eta} + \left( 2\delta^\beta \eta v_{c\eta} + \sqrt{3} \delta^{1-\frac{3}{2}\beta} v_{c\xi} - \delta^\beta \frac{\partial^2 v_{c\varphi}}{\partial \xi^2} + i\delta^\beta v_{c\varphi}^{(1)} + \delta^\beta v_{c\eta}^{(1)} \right) + \dots = 0 \quad (41b)$$

となる。ここで、式 (35) と  $\cos \theta = \frac{1}{2} + \delta^\beta \eta + \dots$  を用いた。

式 (41a) と (41b) の主要項はそれぞれの式の最初の 2 項であるが、いずれも  $O(1)$  で、同一の方程式

$$v_{c\varphi} = iv_{c\eta} \quad (42)$$

となる。このように方程式が縮退しているため、解を決定するためには次のオーダーを調べる必要がある。

式 (41a) と (41b) の括弧の中の項が次のオーダーになる。最も一般的な解は、これらの項のすべてが同じオーダー、すなわち、

$$-2\eta v_{c\varphi} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial q_c}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 v_{c\eta}}{\partial \xi^2} + iv_{c\eta}^{(1)} - v_{c\varphi}^{(1)} = 0, \quad (43a)$$

$$2\eta v_{c\eta} + \sqrt{3} v_{c\xi} - \frac{\partial^2 v_{c\varphi}}{\partial \xi^2} + iv_{c\varphi}^{(1)} + v_{c\eta}^{(1)} = 0 \quad (43b)$$

の場合に得られる。ただし、 $\beta = 1 - \frac{3}{2}\beta$  である。この式と (37) より、

$$\alpha = \frac{4}{5}, \quad \beta = \frac{2}{5} \quad (44)$$

となる。

式 (39), (40a), (42), (43a) および (43b) を合わせると、

$$\left[ \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} + i \left( 2\eta \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \frac{\partial Q}{\partial \xi} = 0 \quad (|\eta| > 0, \xi > 0) \quad (45a)$$

が導かれる。ここに、 $Q(\xi, \eta)$  を

$$q_c(\xi, \eta) = \frac{3\sqrt{3}ae^{ib}}{4} Q(\xi, \eta) \quad (45b)$$

で導入した。

式 (45a) の導出において、ナビエ・ストークス方程式の  $\eta$  についての最高階微分項が無視されていることに注意する。すなわち、式 (45a) の解は、 $\eta = 0$  で連続であるが微分可能でなくてもよい。解  $Q$  (したがって  $q_c$ ) が求まれば、 $v_{c\varphi}$  が (40a) より、そして  $v_{c\eta}$  が (42) より、続いて、 $v_{c\xi}$  が (39) より求まって、

$$v_{c\xi} = -\frac{3\sqrt{3}i}{8} ae^{ib} \frac{\partial Q}{\partial \eta}, \quad (46a)$$

$$v_{c\eta} = \frac{3i}{4} ae^{ib} \frac{\partial Q}{\partial \xi}, \quad (46b)$$

$$v_{c\varphi} = -\frac{3}{4} ae^{ib} \frac{\partial Q}{\partial \xi} \quad (46c)$$

となる。

さて、境界層解の特異成分は、臨界層変数  $\xi$  と  $\eta$  で式 (36a) – (36c) のように表される。それらを式 (38a) – (38c) と比較し、 $\xi = 0$  とおくと、 $v_{c\xi}(0, \eta) = 0$ ,  $v_{c\eta}(0, \eta) = \frac{3}{4}iae^{ib}$ ,  $v_{c\eta}^{(1)}(0, \eta) = \frac{1}{2}iae^{ib}\eta$ ,  $v_{c\varphi}(0, \eta) = -\frac{3}{4}ae^{ib}$ ,  $v_{c\varphi}^{(1)}(0, \eta) = -\frac{1}{2}ae^{ib}\eta$  が得られる。これらの条件は、 $\xi = 0$  での式 (40a) と (41b) と合わせて、

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}(0, \eta) = 1 \quad (|\eta| > 0), \quad (47a)$$

$$\frac{\partial^3 Q}{\partial \xi^3}(0, \eta) = -2i\eta \quad (|\eta| > 0) \quad (47b)$$

を与える。境界層内の圧力場は正則であるから、式 (45b) より、

$$Q(0, \eta) = 0 \quad (|\eta| > 0) \quad (47c)$$

である。式 (36c) が示すように、速度の方位角成分は、 $\xi \rightarrow \infty$  でゼロに近づく。したがって、

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}(\xi, \eta) \rightarrow 0 \quad (|\eta| > 0, \xi \rightarrow \infty) \quad (47d)$$

が満たされる。

微分方程式系 (45a) – (47d) には、 $\eta$  に関してエルミート対称、

$$Q(\xi, \eta) = Q^*(\xi, -\eta) \quad (48)$$

の解が存在する。ここに、 $*$  は共役複素数である。境界層解の特異部分 (36a) – (36c) で因子  $ae^{ib}$  を除いたものも臨界層近傍ではエルミート対称である。したがって、ここではこの対称性を仮定する。すると、 $\eta = 0$  では、

$$\text{Imag}(Q(\xi, 0)) = 0 \quad (\xi \geq 0) \quad (49a)$$

である。式 (45a) の虚部は、 $\text{Real}(\partial^2 Q / \partial \xi \partial \eta(\xi, 0)) = 0$  であるが、これを  $\xi$  について積分すると、

$$\text{Real}\left(\frac{\partial Q}{\partial \eta}(\xi, 0)\right) = 0 \quad (\xi \geq 0) \quad (49b)$$

が得られる。ここに、境界条件 (47c) を考慮している。

ところで、境界層速度 (36a) – (36c) の特異成分の  $\xi \rightarrow 0$  かつ  $|\eta| \rightarrow \infty$  (ただし、 $|\eta|^{\frac{1}{2}}\xi$  は有限) の極限をとり、式 (46a) – (46c) と比較すると、

$$Q(\xi, \eta) \rightarrow \frac{\text{sgn}(\eta)i(1 - \text{sgn}(\eta)i)}{2|\eta|^{1/2}} \left(1 - \exp\left[-(1 - \text{sgn}(\eta)i)|\eta|^{\frac{1}{2}}\xi\right]\right)$$

$$(\xi \rightarrow 0, |\eta| \rightarrow \infty, |\eta|^{\frac{1}{2}}\xi \text{ は有限, のとき})$$

であることがわかる。微分方程式 (45a) は  $\eta$  に関し 1 階であるから、この条件は課せられない。しかし、結果として得られた解はこの条件を満たしていることを確認している。

方程式 (45a) を境界条件 (47a) – (47d), (49a) および (49b) のもとで、差分法を用いて数値的に解く (差分法の詳細は割愛)。図 2 に、計算領域  $0 \leq \xi \leq 10$ ,  $0 \leq \eta \leq 8$  で  $\xi$  方向の格子数 100,  $\eta$  方向の格子数 80 の結果を示す。

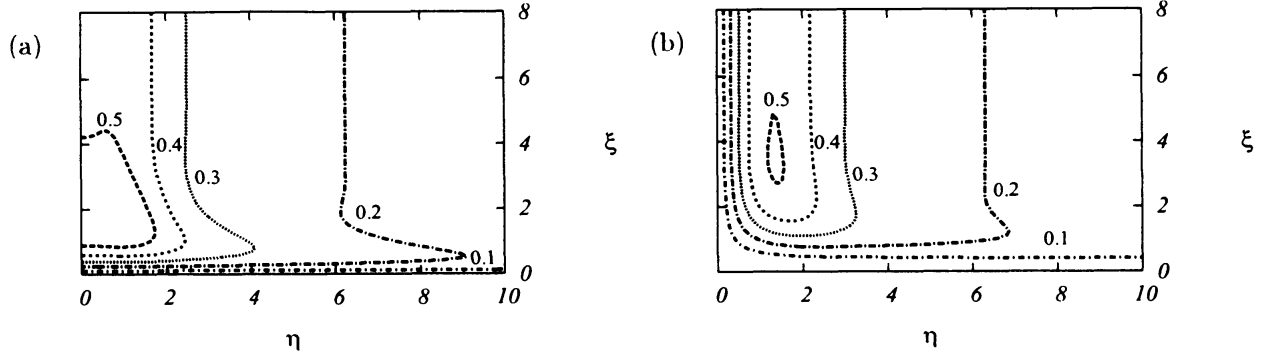


図 2: 臨界層方程式の解  $Q(\xi, \eta)$ 。(a) 実部, (b) 虚部。

境界層外縁での速度の動径成分  $B(\mu)$  は, 境界層解 (32) を臨界点  $\mu = \pm \frac{1}{2}$  の近傍で, 臨界層解で修正して,

$$B(\mu) = \begin{cases} -\frac{3\sqrt{3}iae^{ib}}{8} \left\{ \delta^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial Q^*}{\partial \eta}(\eta_-) - \frac{i\sqrt{1-\mu^2}(1-\mu)\lambda_-(\mu)}{\sqrt{3}(\frac{1}{2}-\mu)^2} \right\} & (-\frac{1}{2} - \mu_c < \mu < -\frac{1}{2} + \mu_c) \\ -\frac{3\sqrt{3}iae^{ib}}{8} \left\{ \frac{i\sqrt{1-\mu^2}(1+\mu)\lambda_+(\mu)}{\sqrt{3}(\frac{1}{2}+\mu)^2} + \delta^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial Q}{\partial \eta}(\eta_+) \right\} & (\frac{1}{2} - \mu_c < \mu < \frac{1}{2} + \mu_c) \\ \frac{3ae^{ib}\sqrt{1-\mu^2}}{8} \left[ \frac{(1+\mu)\lambda_+(\mu)}{(\frac{1}{2}+\mu)^2} - \frac{(1-\mu)\lambda_-(\mu)}{(\frac{1}{2}-\mu)^2} \right] & (\text{その他}) \end{cases} \quad (50)$$

となる。ここに,  $\eta_+ = \delta^{-\frac{2}{3}}(\mu - \frac{1}{2})$ ,  $\eta_- = \delta^{-\frac{2}{3}}(\mu + \frac{1}{2})$  そして  $O(\delta^{\frac{2}{3}}) \ll O(\mu_c) \ll O(1)$  である。この関数は,  $B(\mu) = -B(-\mu)$  かつ  $B(1) = B(-1) = 0$  なる性質がある。図 3 に,  $Re = 10^5$  ( $\delta = 10^{-2.5}$ ) の場合の  $u_{r\infty}(\mu, \varphi)$  を示す。

この修正された境界層解を用いると, 式 (18) の積分は収束する。これは実数  $\mu$  について区間  $[-1:1]$  での積分であるが,  $\mu$  を複素数に拡張し, 積分経路を複素  $\mu$  面の下半領域  $\text{Imag}(\mu) < 0$  に移しても積分値は変わらない。パラメータ  $\delta$  がゼロの極限では, 臨界点近傍からの寄与は無視でき, 積分は,

$$\begin{aligned} \frac{8}{15} &= \frac{3ae^{ib}}{4} \int_{-1}^1 \frac{\mu(1+\mu)(1-\mu^2)(1+\text{sgn}(\frac{1}{2}+\mu)i)}{|\frac{1}{2}+\mu|^{\frac{3}{2}}} d\mu \\ &\quad (\text{Imag}(\mu) < 0) \\ &= \frac{3ae^{ib}}{4} \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{-1}^1 \mu(1+\mu)(1-\mu^2)(\frac{1}{2}+\mu)^{-3/2} d\mu \\ &\quad (\text{Imag}(\mu) < 0) \end{aligned}$$

と書ける。

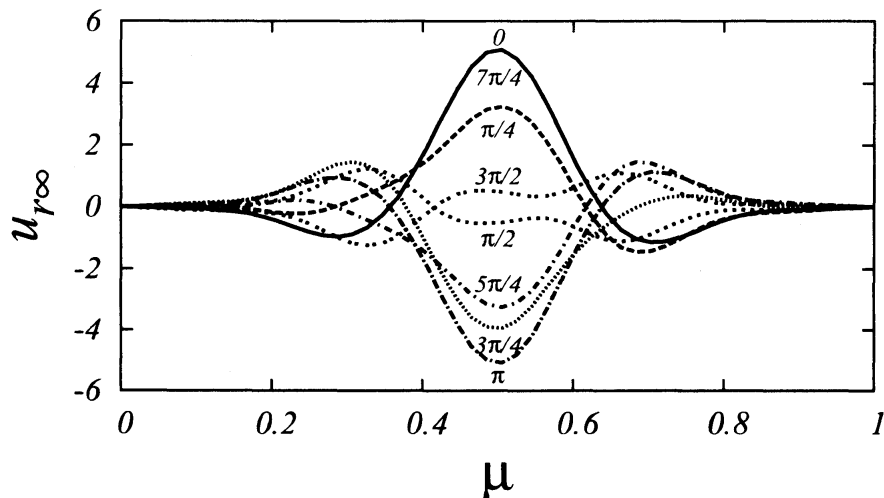


図 3: 境界層外縁での動径速度分布。数字は方位角  $\varphi$  を表す。 $\delta = 10^{-2.5}$ ,

積分変数を、関係式  $2\mu + 1 = 3\zeta^2$  により、 $\mu$  から  $\zeta$  に変換すると、この方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{8}{15} &= \frac{3\sqrt{3}ae^{ib}}{16} e^{\frac{\pi}{4}i} \int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{(1-\zeta^2)(3\zeta^2+1)^2(3\zeta^2-1)}{\zeta^2} d\zeta \\ &= \frac{\sqrt{2}ae^{ib}}{35} \left[ (19+9\sqrt{3}) - (19-9\sqrt{3})i \right] \end{aligned}$$

となる。これより、

$$a = \frac{14\sqrt{151}}{453} = 0.3797 \dots, \quad (51a)$$

$$b = \arctan \left( \frac{19-9\sqrt{3}}{19+9\sqrt{3}} \right) = 0.09831 \dots (\text{rad}) = 5.63 \dots (\text{deg}) \quad (51b)$$

が得られる (Busse, 1968)。

### 3.4 非粘性領域の $O(\Gamma)$

前節で、境界層外縁における速度の動径成分  $B(\mu)$  が得られたので (式 (50) 参照),  $F(x)$  に関する積分方程式 (17) を解くことができる。

臨界点  $\mu = \pm \frac{1}{2}$  近傍での  $B(\mu)$  の急激な変動は非粘性領域に強い剪断層を励起するので、粘性項がそこでも無視できるほど小さいかどうかをまず吟味しよう。剪断層の厚さが  $O(\delta^{\frac{2}{3}})$  であること (式 (44) 参照) とそこでの速度の動径成分が  $O(\Gamma\delta^{-\frac{2}{3}})$  であること (式 (50) 参照) に注意すると、粘性項は他の項に比べて  $\delta^{\frac{2}{3}}$  ( $= \delta^2 \times \delta^{-\frac{2}{3}} \times \delta^{-2 \times \frac{2}{3}}$ ) 倍だけ小さいことがわかる。ゆえに、内部領域の  $O(\Gamma)$  の流れを式 (50) を用いて行なう非粘性解析が正当化される。

式 (17) に  $\sin^2 \theta P_{2n+1}(\cos \theta)$  (ただし、 $P_{2n+1}(\cos \theta)$  は  $2n+1$  次のルジャンドル多項式である) を掛けて  $\theta$  について  $[0: \pi]$  の範囲で積分する。未知関数  $F(\cos \theta)$  をルジャンドル多項式の無限級数で

$$F(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n P_{2n+1}(\cos \theta) \quad (52)$$

のように展開すると、展開係数  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) についての無限連立 1 次方程式、

$$M_{1,1}F_1 + M_{1,2}F_2 = B_1 + \frac{8}{35}, \quad (53a)$$

$$M_{n,n-1}F_{n-1} + M_{n,n}F_n + M_{n,n+1}F_{n+1} = B_n \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (53b)$$

が得られる（導出は割愛）。ここに、

$$B_n = \int_0^\pi B(\cos \theta) \sin^2 \theta P_{2n+1}(\cos \theta) d\theta \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (54)$$

$$M_{n,n-1} = \frac{2\pi}{(4n-1)(4n+1)(4n+3)} \left[ 6n(2n+1)P_{2n+1}(\tfrac{1}{2}) + 4\sqrt{3}nP_{2n+1}^1(\tfrac{1}{2}) + P_{2n+1}^2(\tfrac{1}{2}) \right], \quad (55a)$$

$$\begin{aligned} M_{n,n} = \frac{2\pi}{4n+3} & \left\{ \left[ \frac{3}{4n+3} \left( \frac{(2n+1)^2}{4n+1} + \frac{(2n+2)^2}{4n+5} \right) - 3 \right] P_{2n+1}(\tfrac{1}{2}) \right. \\ & - \frac{2\sqrt{3}}{2n+2} \left[ \frac{1}{4n+3} \left( \frac{(2n+1)^2}{4n+1} + \frac{(2n+2)^2}{4n+5} \right) - \frac{2n+1}{4n+1} \right] P_{2n+1}^1(\tfrac{1}{2}) \\ & \left. + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \left[ \frac{1}{4n+3} \left( \frac{(2n+1)^2}{4n+1} + \frac{(2n+2)^2}{4n+5} \right) - \frac{4n+3}{4n+1} \right] P_{2n+1}^2(\tfrac{1}{2}) \right\}, \end{aligned} \quad (55b)$$

$$M_{n,n+1} = \frac{2(2n+2)(2n+3)\pi}{(4n+3)(4n+5)(4n+7)} \left[ 3P_{2n+1}(\tfrac{1}{2}) - \frac{2\sqrt{3}}{2n+2} P_{2n+1}^1(\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} P_{2n+1}^2(\tfrac{1}{2}) \right] \quad (55c)$$

である。

ここで、 $M_{1,0} = 0$  であること、そしてゼロ次の係数  $F_0$  が上記の方程式系 (53a) と (53b) に現れていないことに注意する。この係数は、 $\delta$  展開の次のオーダーで決定されるべきものであるが、このオーダーでは内部剪断層の影響が粘性項を通して入ってくるので、解析は極めて面倒になる。ここでは、この係数を求めることはしない。

パラメータ  $\delta$  ( $\ll 1$ ) を与えて、連立方程式 (53a) と (53b) を数值的に解くには次のようにする。

- [1] 偏微分方程式 (45a) を境界条件 (47a) – (47d), (49a) および (49b) のもとで数值的に解き、関数  $Q(\xi, \eta)$  を求める。
- [2] 境界層外縁での速度の動径成分  $B(\mu)$  を式 (50) を用いて計算する。
- [3] 式 (53a) と (53b) の右辺の係数  $B_n$  を式 (54) の数値積分より求める。
- [4] 連立方程式 (53a) と (53b) を適当な個数  $N$  で打ち切って、係数  $F_n$  を数值的に求める。打ち切り個数  $N$  は、 $\delta = 10^{-2.5}, 10^{-3}, 10^{-4}$  のとき、それぞれ  $N = 50, 100, 200$  とする。
- [5] 関数  $F(\mu)$  を展開 (52) の有限級数から求める（有限ルジャンドル多項式級数については付録 B を参照）。
- [6] 速度場を式 (16a) – (16c) および (11b) より求める。

### 3.5 数値シミュレーションとの比較

前節で求めた解析解の有効性を確かめるために、ナビエ・ストークス方程式の直接数値シミュレーションによる結果と比較する。

計算はスペクトル法 (Kida *et al.* 2008) で行ない、支配パラメータを  $Re = 10^5$  と  $\Gamma = 2 \times 10^{-4}$  として、剛体回転流の初期状態から時間発展を追ひ、定常解を求めた (清水 2009 による)。一方、解析解は、 $O(1)$  の剛体回転流 (式 (6a)),  $O(\Gamma Re^{1/2})$  の剛体回転流 (式 (24a) – (24c)) に加えて、 $O(\Gamma)$  の速度場 (ただし、 $F_0$  の剛体回転流成分は未定である。また、 $O(\Gamma Re^{3/10})$  の剪断層を含む。) まで求められている。したがって、ここでは剛体回転流成分を除いて、両者の比較を行なう。

図 4 と図 5 には、それぞれ、数値シミュレーションと理論解析によって得られた速度場を、スピン回転軸を通り方位角  $\varphi$  の異なる 8 つの平面上で描いてある ((a) と (i) は同じ面を互いに裏側から見たものである)。面内の速度を矢印で、面に垂直な速度を灰色 (紙面手前向き) と白 (紙面奥行き) で示している。流れの構造は両者でよく一致していることがわかる。

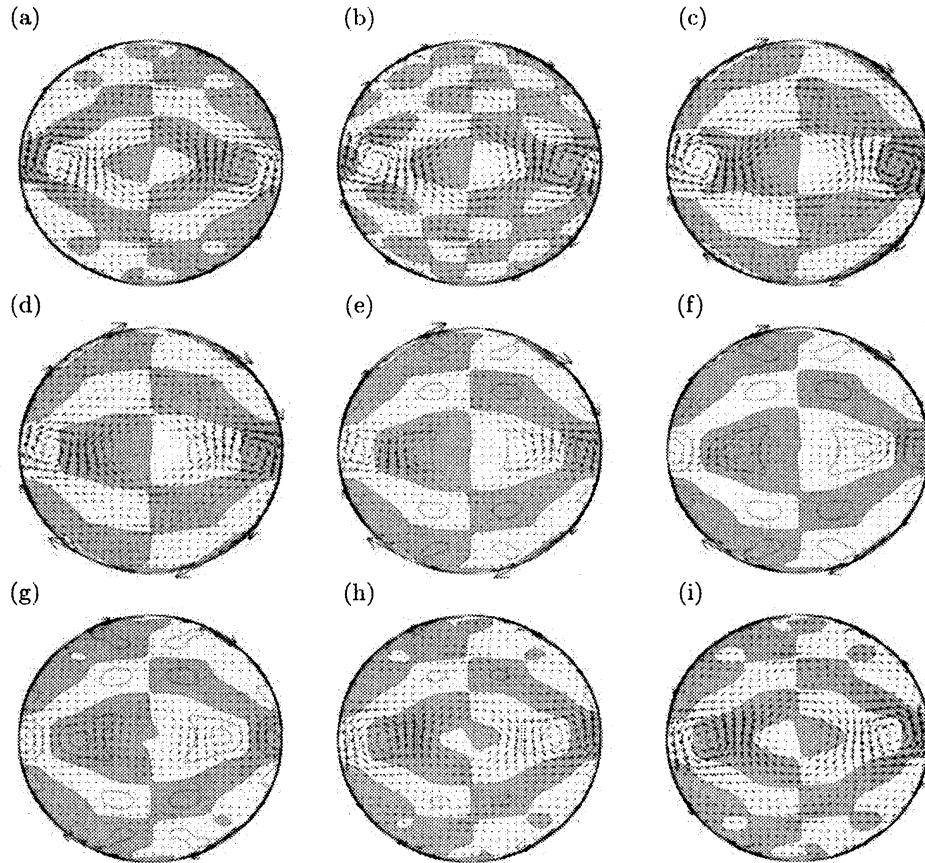


図 4: スピン回転軸を通る平面上の速度分布。ただし、剛体回転流成分は取り除かれている。(a)  $\varphi/\pi = 0$ , (b)  $\frac{1}{8}$ , (c)  $\frac{1}{4}$ , (d)  $\frac{3}{8}$ , (e)  $\frac{1}{2}$ , (f)  $\frac{5}{8}$ , (g)  $\frac{3}{4}$ , (h)  $\frac{7}{8}$ , (i) 1.  $Re = 10^5$ ,  $\Gamma = 2 \times 10^{-4}$ . 数値計算。

#### 4 まとめ

歳差回転球内の定常流れの構造を、自転が速く歳差が弱い場合に、レイノルズ数  $Re$  が大きくボアンカレー数  $\Gamma$  が小さいという二重極限における漸近解析により求めた。この極限は地球内部の溶融鉄の流れ ( $Re = 10^{15}$ ,  $\Gamma = 10^{-7}$ ,  $a = 3 \times 10^8 \text{ cm}$ ,  $\Omega = 7 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ ,  $\nu = 7 \times 10^{-3} \text{ cm}^2/\text{s}$ ) と関連して、多くの研究者の興味をひいてきた。球面に沿う薄い境界層と境界層近似の破綻する臨界層の存在は従来から知られていた (Bondi and Lyttleton 1953, Roberts and Stewartson 1963, Busse 1968) が、臨界層内と非粘性領域での速度場の具体的な表現を得たのは本研究が初めてである。この定常流の具体的な表現を用いて、レイノルズ数が大きい極限での安定性の臨界曲線の漸近枝を求めること、そして円錐形をした2つの剪断層を含む特異な構造をもつ流れの中での粒子混合特性を調べることが次の目標である。

図4の数値シミュレーションは清水雅樹博士、図4と図5の作図は中村拓也氏によるものである。記して謝意を表す。

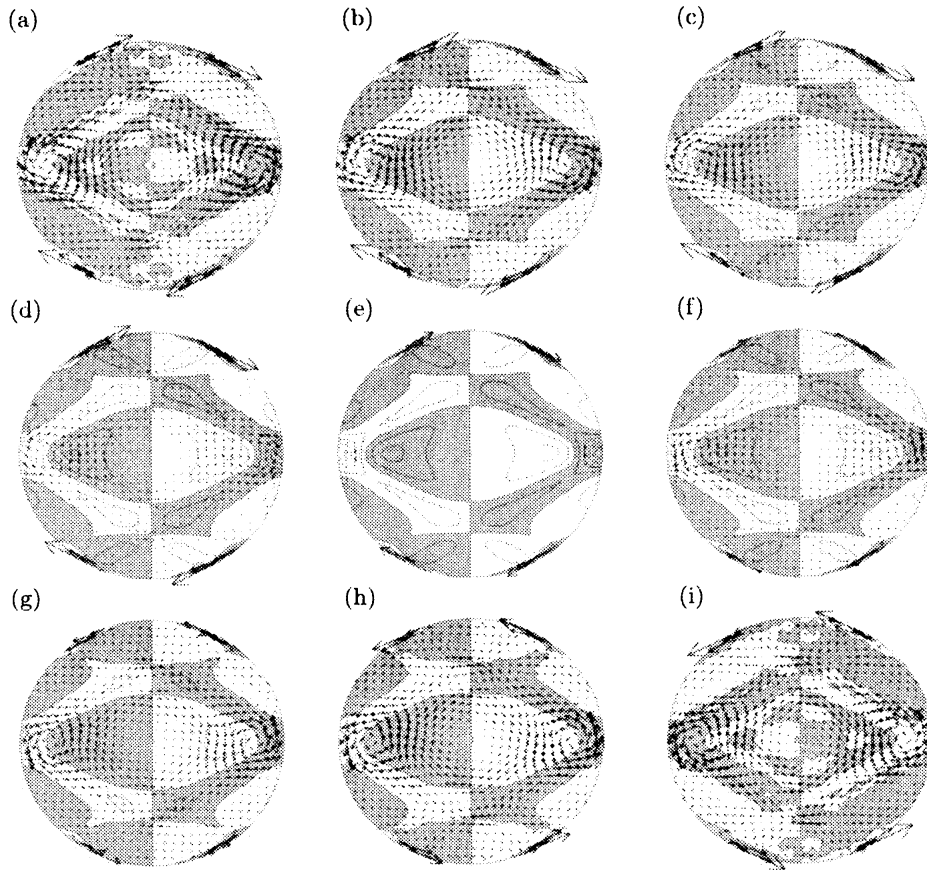


図 5: 図 4 に対応する理論。  $\Gamma \ll Re^{-1/2} \ll 1$ 。



## 付録

### A. ある双曲型偏微分方程式の解

ここでは、双曲型偏微分方程式、

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} - \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v = 0 \quad (56)$$

の一般解を導出する。ただし、 $\sigma$  は正定数とする。式 (15) は  $\sigma = \sqrt{3}$  の場合にあたる。

この方程式の各項は独立変数  $\rho$  と  $x$  について同次であるから、解を区間  $[a: b]$  で連続的に異なる勾配  $\kappa$  をもつ平面波の重ねあわせ、

$$v(x, \rho) = \int_a^b A'(\kappa) F(x + \kappa \rho) d\kappa \quad (57)$$

で表すことができる。ここに、 $F(x)$  と  $A(\kappa)$  は 2 階微分可能な関数で、 $a$  と  $b$  ( $a > b$ ) は定数、プライム' は微分を表す。式 (57) を (56) に代入して、

$$\int_a^b A'(\kappa) \left( (\kappa^2 - \sigma^2) F''(x + \kappa \rho) + \frac{\kappa}{\rho} F'(x + \kappa \rho) - \frac{1}{\rho^2} F(x + \kappa \rho) \right) d\kappa = 0 \quad (58)$$

を得る。変数  $\kappa$  について部分積分すると、この方程式は

$$\begin{aligned} & \left[ A'(\kappa) (\kappa^2 - \sigma^2) F'(x + \kappa \rho) + \left( - (A'(\kappa) (\kappa^2 - \sigma^2))' + A'(\kappa) \kappa \right) F(x + \kappa \rho) \right]_a^b \\ & + \int_a^b \left\{ \left[ (A'(\kappa) (\kappa^2 - \sigma^2))' - A'(\kappa) \kappa \right]' - A'(\kappa) \right\} F(x + \kappa \rho) d\kappa = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

となる。

この方程式が任意の  $F(x)$  に対して成立する条件を求めよう。まず、式 (59) の 2 行目の定積分は、

$$\left[ (A'(\kappa) (\kappa^2 - \sigma^2))' - A'(\kappa) \kappa \right]' - A'(\kappa) = 0$$

であれば、恒等的にゼロである。これを 2 回積分すると、

$$(\kappa^2 - \sigma^2) A'(\kappa) - \kappa A(\kappa) = -\gamma \kappa - \beta \sigma^2$$

となり、 $A(\kappa)$  について整理すると、

$$A(\kappa) = \alpha \sqrt{\sigma^2 - \kappa^2} + \beta \kappa + \gamma \quad (60)$$

が得られる。ここに、 $\alpha, \beta$  および  $\gamma$  は積分定数である。式 (60) を  $\kappa$  について微分すると、

$$A'(\kappa) = -\frac{\alpha \kappa}{\sqrt{\sigma^2 - \kappa^2}} + \beta \quad (61)$$

となる。

次に、式 (59) の第 1 行目が任意の  $F(x)$  についてゼロとなる条件を求める。この括弧の中に式 (61) を代入して、

$$(\alpha \kappa - \beta \sqrt{\sigma^2 - \kappa^2}) \sqrt{\sigma^2 - \kappa^2} F'(x + \kappa \rho) - (\alpha \sqrt{\sigma^2 - \kappa^2} + \beta \kappa) F(x + \kappa \rho) = 0 \quad (62)$$

を得る。この方程式が、任意の  $F(x)$  に対して、しかも、異なる 2 つの  $\lambda$  の値 (すなわち、 $a$  と  $b$ ) に対してなりたつためには、 $\beta = 0$  でなければならない。このとき、 $\lambda = \pm \sigma$ , すなわち、 $a = -\sigma$ ,  $b = +\sigma$  で、式 (57) は、

$$v(x, \rho) = \int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{\kappa}{\sqrt{\sigma^2 - \kappa^2}} F(x + \kappa \rho) d\kappa \quad (63)$$

となる。ただし、ここでは一般性を失うことなしに、 $\alpha = -1$  とおいた。

変数変換  $\kappa = \sigma \cos \lambda$  を施すと、この方程式は、

$$v(x, \rho) = \int_0^\pi F(x + \sigma \cos \lambda \rho) \cos \lambda d\lambda \quad (64)$$

と書き換えられる。

第 3.1 節の一般解 (16a) は、 $\sigma = \sqrt{3}$  とおき、 $F(x) \rightarrow 2\sqrt{3}F(\frac{1}{2}x)$  と変換することによって得られる (Bondi and Lyttleton, 1953)。

## B. ルジャンドル多項式展開

正則でない関数をテイラー展開すると発散級数になるため、その有限級数はもとの関数を近似しないことはよく知られている。これを救うため、パデ近似が提案されているがうまくいっていないとはいえない (Hesthaven *et al.* 2006)。ここでは、有限ルジャンドル多項式級数を適当なコロケーション点 (打ち切り項数の次数のルジャンドル多項式の零点) で見ると、不連続な関数や発散する関数が精度よく再現されることを示す。

区間  $-1 \leq x \leq 1$  で定義された関数  $f(x)$  がルジャンドル多項式  $P_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) の無限級数、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n P_n(x) \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (65)$$

で表されているとする。ここに、展開係数  $\tilde{f}_n$  は

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \tilde{f}_n \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (66)$$

なる積分で与えられる。

さて、 $N$  次のルジャンドル多項式  $P_N(x)$  の零点を  $-1 < x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < 1$  とし、重み関数を

$$w_i = \frac{2}{(1-x_i^2)P_N'(x_i)^2} \quad (i = 0, 1, \dots, N-1) \quad (67)$$

とする。このとき、連立一次方程式

$$\sum_{i=0}^{N-1} w_i P_n(x_i) g_i = \frac{2}{2n+1} \tilde{f}_n \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (68)$$

の解、 $g_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ) を  $f(x_i)$  の近似値とする。

有限ルジャンドル多項式級数の優秀性を示すため、厳密な展開係数がわかっている次の 3 つの関数を取り上げる。

例 1：連続だが微分不可能な点をもつ関数：

$$|x| = \frac{1}{2} P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n+2)!!} (4n+1) P_{2n}(x) \quad (69)$$

例 2：不連続点をもつ関数：

$$\text{sign}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4n+3}{2n+2} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} P_{2n+1}(x) \quad (70)$$

例 3：発散する点をもつ関数：

$$\frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} (4n+3) P_{2n+1}(x) \quad (71)$$

ただし、 $0!! = (-1)!! = 1$  である。

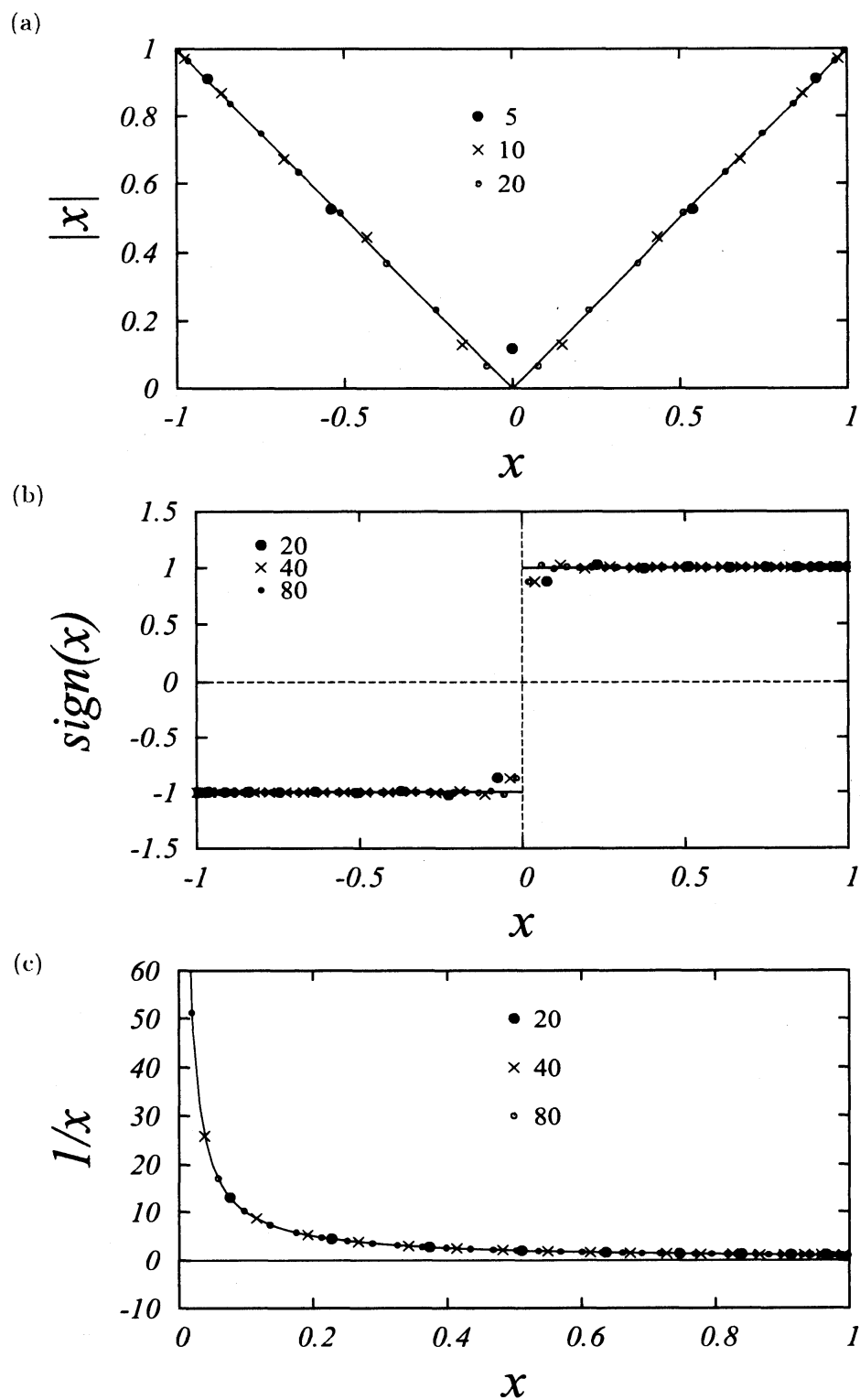


図 6: 有限ルジャンドル多項式級数。(a)  $|x|$ , (b)  $\text{sign}(x)$ , (c)  $1/x$ .

図 6 に、これらの関数の有限ルジャンドル多項式級数のふるまいを示す。対象とする関数を実線で、級数を記号（数字は打ち切り項数）で表している。いずれの関数に対しても、特異点に最も近い点を除き、もとの関数を精度よく再現していることがわかる。

ここでは、コロケーション点として、打ち切り項数の次数をもつルジャンドル多項式の零点を採用したが、これが最適のようで、これ以外の点では有限打ち切り級数の結果はよくないことを指摘しておく。

## 参考文献

- Bondi, H. and Lyttleton, R.A. On the dynamical theory of the rotation of the Earth. II. The effect of precession on the motion of the liquid core. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **49** (1953) 498-515.
- Busse, F.H. Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell, *J. Fluid Mech.* **33** (1968) 739-751.
- Goto, S., Ishii, N., Kida, S., Nishioka, M. Turbulence generator using a precessing sphere. *Phys. Fluids* **19** (2007) 061705.
- Hessthaven, J.S., Kaber, S.M. and Lurati, L.: Padé-Legendre Interpolants for Gibbs Reconstruction. *J. Sci. Comp.* **28** (2006) 337-359.
- 木田重雄, 後藤晋, 石井伸和, 松原大樹, 中山健太郎, 西岡通男: 2 軸回転球体流れの構造を観る. *数理研講究録* **1567** (2007) 141-152.
- Kida, S., Nakayama, K. Helical flow structure in a precessing sphere. *J. Phys. Soc. Japan* **77** (2008) 054401.
- Kida, S., Nakayama, K., Honda, N. Streamline tori in a precessing sphere at small Reynolds numbers. *Fluid Dyn. Res.* **41** (2009) 011401.
- Roberts, P.H. and Stewartson, K. On the stability of a Maclaurin spheroid of small viscosity. *Astrophys. J.* **137** (1963) 777-790.
- 清水雅樹: 私信 (2009)